Istituzioni Matematiche – prova d'esame

1. Uno studente deve sostenere 6 esami ogni anno nell'ordine che preferisce per i 3 anni di durata del suo corso di laurea, senza poter rimandare un esame da un anno all'altro.

(3/0/-1) Quante sono le possibili sequenze dei 18 esami? $\boxed{(6!)^3}$

2. Un gruppo di lavoro è formato da 10 persone, di cui 4 sono donne. Qual è la probabilità che estraendo un sottogruppo di 4 individui:

(3/0/-1) non vi sia nemmeno una donna? $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{210}$

Spiegazione: l'unica sequenza è **F F F F** . In 4 casi su 10 la prima estratta è una donna.

Di queste (4/10) sequenze che cominciano con **F** in 3 casi su 9 (numero di femmine rimaste diviso numero di persone rimaste) la seconda è una femmina (da cui la moltiplicazione). Quindi in 12 casi su 90 le prime due estratte sono femmine. E così l'analisi successiva.

(4/0/-1) il numero degli uomini sia inferiore a quello delle donne? $4\,\frac{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5}{42}$

Si tratta di fare la stessa analisi di prima per le sequenze **F F F F** , **M F F F** , **F M F F** , **F F M F** , **F F F M** .

3. Si consideri la successione

$$a_n = 5^n - 4^n - 3^n.$$

Si calcoli (se esiste) il limite per $n \to \infty$.

(3/0/-1) Il limite della successione per $n \to \infty$

○ non esiste; **X** esiste ed è ∞; ○ esiste finito ed è $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \boxed{}$

Si consideri poi la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty} b_n$ dove $b_n = \frac{1}{a_n}$.

(3/0/-1) Si determini il carattere della serie

X convergente; ○ divergente; ○ irregolare.

4. Sia $f(x)$ una funzione derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e $g(x)$ la sua derivata. Si dica se le affermazioni seguenti sono vere o false

(2/0/-1) $\boxed{\mathbf{V}}$ **F** se $g(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ allora $f(x)$ è una funzione monotona crescente;

(2/0/-1) **V** $\boxed{\mathbf{F}}$ $f(x)$ è l'unica primitiva di $g(x)$;

(2/0/-1) $\boxed{\mathbf{V}}$ **F** se $g(-1) > 0 > g(1)$ allora f ha un massimo in $(-1, 1)$;

(2/0/-1) **V** $\boxed{\mathbf{F}}$ se $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ allora $g(0) = 0$.

5. Si calcolino la derivata e (se esistono) minimi e massimi relativi di $f(x) = x\left(x - 4\sqrt{x}\right)$ nel suo dominio $D = \{x \geq 0\}$. (2/0/-1) $f'(x) = \boxed{2\,(x - 3\sqrt{x})}$

(2/0/-1) Il minimo relativo

○ non esiste;

X esiste ed è $(9, -27)$

(2/0/-1) Il massimo relativo

○ non esiste;

X esiste ed è $(0, 0)$

6. Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$. Si calcolino:

(4/0/-1) una primitiva di $f(x)$ $\frac{1}{x+1}$ (2/0/-1) l'integrale $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = -\frac{2}{3}$

7. Si calcolino i limiti seguenti.

(3/0/-1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_{\mathrm{e}}(x+1)}{\log_{\mathrm{e}}(x)} = 1$$

(3/0/-1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1 - 2x^2}{x^2} = -4$$